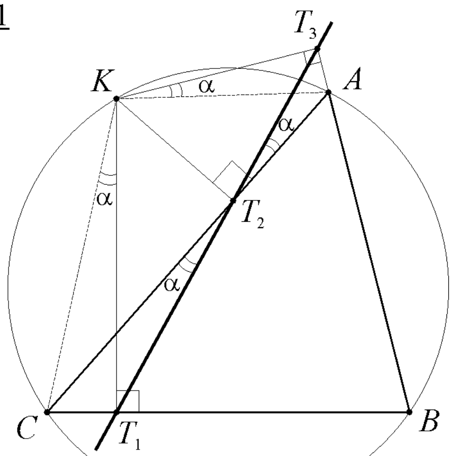
Г. Філіпповський,
Русанівський ліцей,
м. Київ.

Ґрунтовна розмова про пряму Симсона-Уоллеса

Чому саме *пряма Симсона-Уоллеса*, а не просто Симсона, як вона зветься в усій математичній літературі? Ну хоча б заради історичної справедливості, оскільки вперше вона з'являється в працях шотландського математика Вільяма Уоллеса (1768-1843) – професора математики Единбурзьского університету. *Прямою Симсона* її називають тому, що інший шотландський математик Роберт Симсон (1687-1768, професор в університеті Глазго, за змістом своїх геометричних робіт (про теорему Дезарга, Паскаля та інші) майже повинен був "вийти" на цю пряму.
Саме так математики і вважали. Але справа в тому, що в працях Симсона, які всі збережені, жодного слова немає про *пряму Симсона.*
Ми в подальшому все ж таки називатимемо її *прямою Симсона* (так вже склалося), але хоча б в голові будемо тримати, що батьком цієї прямої в дійсності є В.Уоллес.
Отже, час розпочати ґрунтовну розмову про так звану *пряму Симона.*

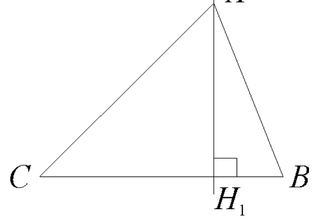
Теорема 1. Основи перпендикулярів, проведених з довільної точки описаного навколо трикутника ABC кола на його сторони (або їх продовження), належать одній прямій – *прямій Симсона*.

<u>*Мал.*1</u>



<u>Доведення</u>. Нехай K – довільна точка кола, описаного навколо трикутника ABC (*мал.*1). T_1; T_2; T_3 – основи перпендикулярів, проведених з точки K на прямі, що містять сторони BC, AC і AB відповідно. Необхідно довести, що точки T_1; T_2; T_3 належать одній прямій.
Оскільки $KABC$ – вписаний чотирикутник, то
$\angle AKC = 180° - B$ (1).
Але навколо чотирикутника KT_3BT_1 також можна описати коло (два протилежні кути дорівнюють по $90°$), тобто
$\angle T_1KT_3 = 180° - B$ (2).
Порівнюючи (1) і (2), робимо висновок: $\angle AKC = \angle T_1KT_3$.
Тоді очевидно, що рівні і кути CKT_1 і AKT_3. Нехай кожен з них дорівнює α.
$\angle CT_2T_1 = \angle CKT_1 = \alpha$ (вписані, спираються на одну дугу в колі з діаметром KC).
Аналогічно $\angle AT_2T_3 = \angle AKT_3 = \alpha$ – вписані, спираються на одну дугу в колі з діаметром AK.
Оскільки $\angle CT_2T_1 = \angle AT_2T_3 = \alpha$, то точки $T_1 - T_2 - T_3$ належать одній прямій.

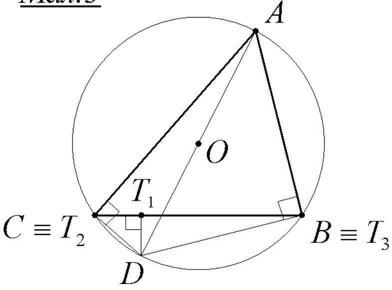
<u>*Мал.*2</u>



Задача 1. Чи існують точки, які належать своїй прямій Симсона?
<u>Розв'язання.</u> Так, існують. Це, наприклад, вершини трикутника ABC. Дійсно, пряма AH_1, що містить висоту, проведену з вершини A, є прямою Симсона точки A (*мал.*2).

Задача 2. Для яких точок пряма Симсона співпадає з однією з сторін трикутника ABC?
<u>Розв'язання</u>. Нехай D – точка, діаметрально протилежна точці A (*мал.*3). Оскільки $\angle DBA = \angle DCA = 90°$ (вписані спираються на діаметр), то точки C і B відповідно співпадуть з

*Мал.*3

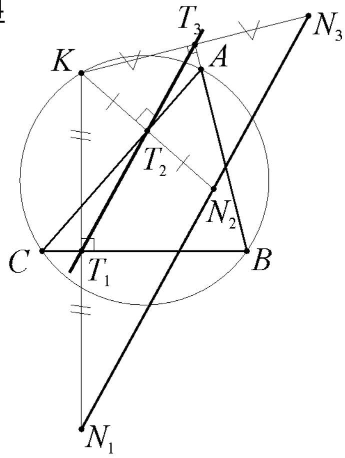


точками T_2 і T_3 прямої Симсона, тобто пряма, що містить сторону BC і буде прямою Симсона точки D.

Отже, прямі Симсона точок, діаметрально протилежних вершинам A, B, C, містять стороні трикутника ABC.

Неважко показати, що інших точок, для яких прямі Симсона співпадають зі сторонами, не існує.

*Мал.*4

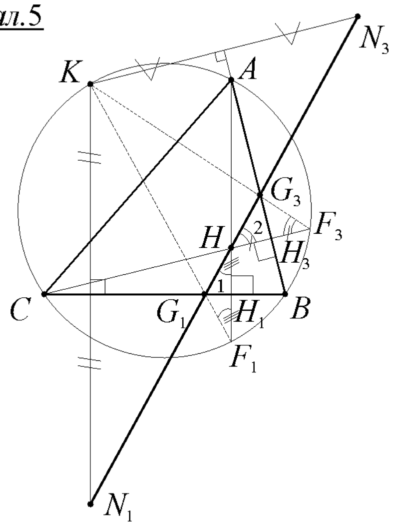


Задача 3. Для будь-якої точки K кола, описаного навколо трикутника ABC, її симетричні образи відносно сторін трикутника належать одній прямій. Доведіть!

Розв'язання. Нехай точки N_1; N_2; N_3 – симетричні образи точки K відносно сторін BC, AC і AB відповідно (*мал.*4). Оскільки середини відрізків KN_1; KN_2; KN_3 – точки $T_1 - T_2 - T_3$ – належать одній прямій (прямій Симсона), то й точки $N_1 - N_2 - N_3$ також належать одній прямій (іноді кажуть: тут ми маємо справу з *"подвоєним" Симсоном*).

Задача 4. Довести, що прямій $N_1 - N_2 - N_3$ *задачі 3* належить також і точка H – ортоцентр трикутника ABC.

*Мал.*5



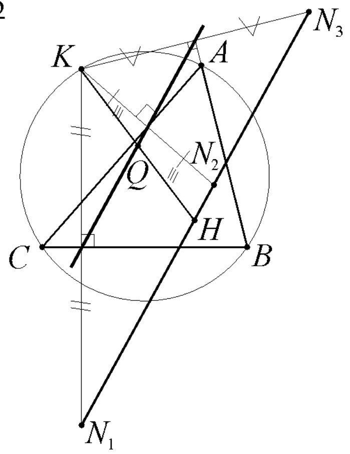
Розв'язання. З'єднаємо точки N_1 і N_3 *задачі 3* з ортоцентром H (*мал.*5). Нехай висоти AH_1 і CH_3 перетинають описане коло в точках F_1 і F_3 відповідно. Відомо, що точки, симетричні ортоцентру відносно сторін трикутника, належать описаному колу, тобто $HH_1 = H_1F_1$ і $HH_3 = H_3F_3$. З чотирикутника H_1HH_3B видно, що $\angle H_1HH_3 = 180° - B$. Якщо ми доведемо, що $\angle 1 + \angle 2 = B$, то задача буде розв'язана.

З міркувань симетрії KF_1 і HN_1 перетнуться в точці G_1, що належить BC, а KF_3 і HN_3 – в точці G_3, що належить AB. Тоді $\angle KF_1A = \angle 1$, а $\angle KF_3C = \angle 2$. Але $\angle KF_1A = \frac{1}{2} \cup AK$ і $\angle KF_3C = \frac{1}{2} \cup KC$ – як вписані. Отже,

$$\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\cup AK + \cup KC) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Враховуючи те, що $\cup AC = 2B$ (на цю дугу спирається вписаний кут B), отримаємо: $\angle 1 + \angle 2 = B$. Таким чином, ортоцентр H належить прямій $N_1 - N_2 - N_3$.

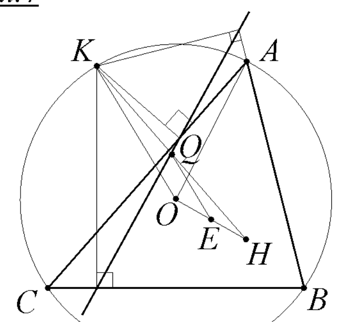
*Мал.*6



Задача 5. Пряма Симсона точки K ділить відрізок KH навпіл. Довести.

Розв'язання. Оскільки за *задачею 4* ортоцентр H належить прямій $N_1 - N_2 - N_3$, яка є "подвоєним" Симсоном, то очевидно, що середина відрізка KH – точка Q – належить прямій $T_1 - T_2 - T_3$ – прямій Симсона точки K (*мал.*6).

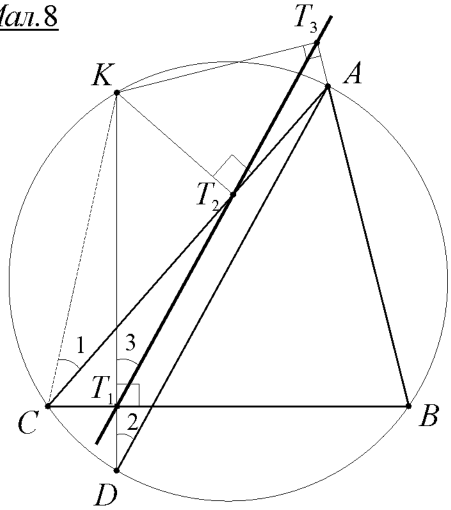
Мал.7



Задача 6. Точка перетину Q прямої Симсона точки K і відрізку KH належить колу 9 точок трикутника ABC. Довести.

Розв'язання. Відомо, що центром кола 9 точок є точка E – середина відрізка OH, а радіус цього кола дорівнює $\frac{1}{2}R$ – половині радіуса кола, описаного навколо трикутника ABC. Тоді очевидно, що QE – середня лінія в трикутнику OKH (*мал.*7), тобто $QE = \frac{1}{2}OK = \frac{1}{2}R$. Це і означає, що Q – середина KH – належить колу 9 точок трикутника ABC.

Мал.8

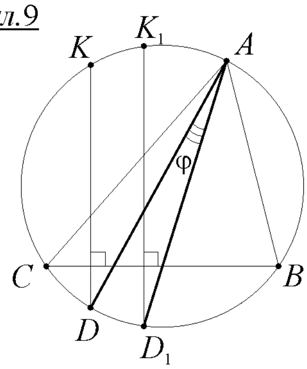


Задача 7. Відрізок AD паралельний прямій Симсона точки K (D – точка перетину прямої KT_1 з описаним колом). Довести.

Розв'язання. $\angle 1 = \angle 2$ - вписані, спираються на дугу KA (*мал.*8). $\angle 1 = \angle 3$ – вписані, спираються на одну дугу в колі з діаметром KC. Оже, $\angle 2 = \angle 3$, або відрізок AD паралельний прямій $T_1 - T_2 - T_3$.

Задача 8. Кут між прямими Симсона точок K і K_1 дорівнює половині дуги між цими точками. Довести.

Мал.9

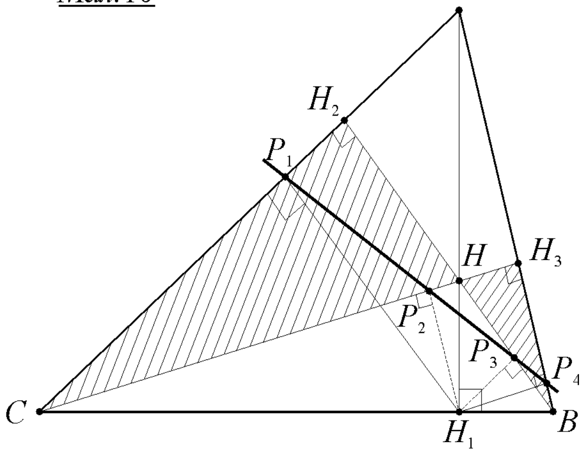


Розв'язання. Відрізки AD і AD_1 паралельні прямим Симсона точок K і K_1 (*задача 7*).Отже, кут між прямими Симсона точок K і K_1 дорівнює куту φ між паралельними їм відрізками AD і AD_1 (*мал.*9).

А кут φ дорівнює половині дузі DD_1 (вписаний). Але $\cup DD_1 = \cup KK_1$ – як дуги, що містяться між паралельними хордами, тобто твердження задачі доведено: $\varphi = \frac{1}{2} \cup KK_1$.

Задача 9. Проекції основи висоти трикутника на дві інші сторони та дві інші висоти належать одній прямій. Доведіть!

*Мал.*10



Розв'язання. За *мал.*10 P_1 і P_4 – проекції основи H_1 висоти AH_1 на сторони AC і AB відповідно, а P_2 і P_3 – проекції H_1 на висоти CH_3 і BH_2. Потрібно довести, що $P_1 - P_2 - P_3 - P_4$ – це одна пряма.

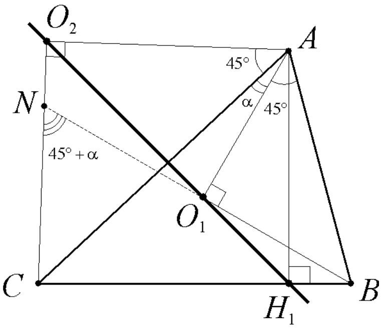
Навколо CH_2HH_1 можна описати коло (два протилежні кути дорівнюють по $90°$). Тоді для точки H_1 описаного навколо ΔCH_2H кола пряма $P_1 - P_2 - P_3$ буде прямою Симсона.

Аналогічно навколо H_1HH_3B можна описати коло. І для точки H_1 цього кола, описаного навколо трикутника BH_3H пряма $P_2 - P_3 - P_4$ буде прямою Симсона.

Оскільки точки P_2 і P_3 належать кожній з двох прямих Симсона , то взагалі всі чотири (P_1; P_2; P_3; P_4) належать одній прямій.

Задача 10. В гострокутному трикутнику ABC на стороні AB побудовано квадрат з центром O_1 – всередину трикутника, а на стороні AC – квадрат з центром O_2 – в зовнішню сторону. H_1 – основа висоти AH_1 трикутника ABC (*мал.*11). Довести, що точки H_1; O_1; O_2 належать одній прямій.

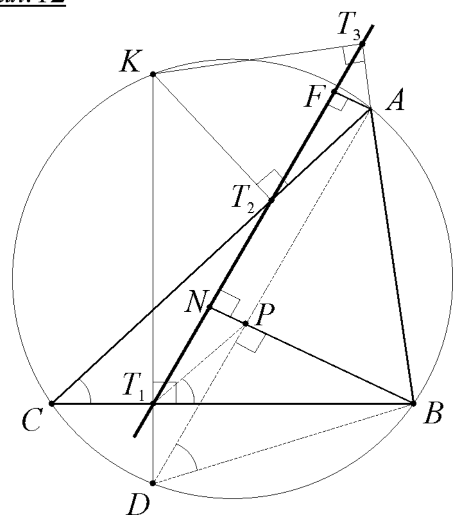
Мал.11



Розв'язання. Продовжимо BO_1 до перетину з O_2C в точці N. Покажемо, що пряма $H_1 - O_1 - O_2$ – пряма Симсона для точки A кола, описаного навколо трикутника BNC.
Оскільки AH_1; AO_1; AO_2 – перпендикуляри на сторони (або їх продовження) трикутника BNC, то достатньо довести, що точка A належить колу, описаному навколо цього трикутника.
Нехай $\angle O_1AC = \alpha$. Тоді $\angle CAB = 45° + \alpha$ і $\angle O_1AO_2 = 45° + \alpha$. В чотирикутнику O_2AO_1N підрахуємо, що $\angle O_2NO_1 = 135° - \alpha$, а суміжний з ним $\angle BNC = 45° + \alpha$. Таким чином $\angle BNC = \angle CAB = 45° + \alpha$, тобто точки B, A, N, C належать одному колу.

Задача 11. NF – проекція сторони AB на пряму Симсона точки K (*мал.*12). довести, що $T_1T_2 = NF$.

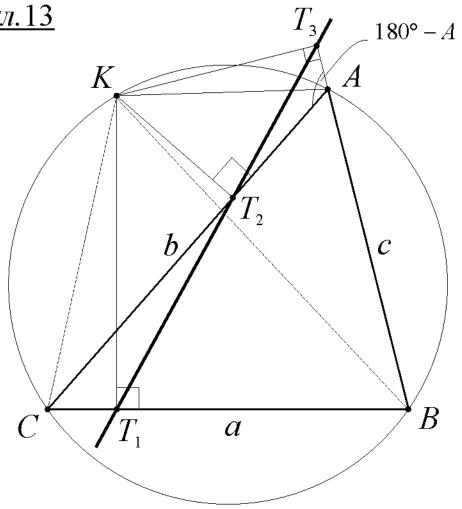
Мал.12



Розв'язання. Нехай P - точка перетину відрізків AD і BN. Відомо, що $AD \parallel NF$ (*задача 7*). Навколо чотирикутника DT_1PB можна описати коло з діаметром DB. Тоді $\angle PT_1B = \angle PDB$ - спираються на дугу PB. Але $\angle ADB = \angle ACB$ (вписані, спираються на дугу AB).
Тобто $\angle ACB = \angle PT_1B$, що означає паралельність прямих T_1P та AC.
Тоді APT_1T_2 – паралелограм ($AP \parallel T_1T_2$ і $AT_2 \parallel T_1P$). Отже $AP = T_1T_2$. Але $AP = NF$. Таким чином, $T_1T_2 = NF$.

Задача 12. Скориставшись прямою Симсона, доведіть *теорему Птоломея*: добуток діагоналей вписаного в коло чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

Мал.13



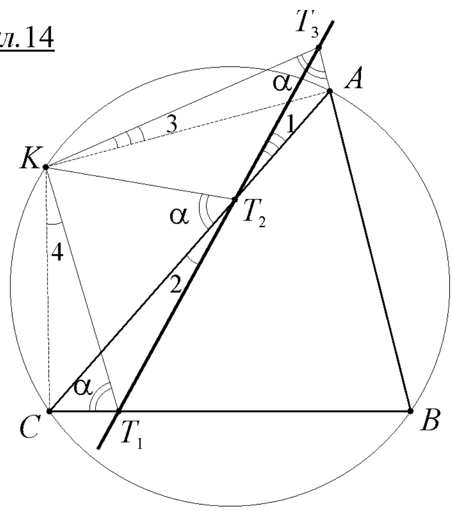
Розв'язання. KA – діаметр кола, описаного навколо чотирикутника KT_3AT_2 (*мал.*13) і $\dfrac{T_2T_3}{\sin(180° - A)} = KA$, або $\boxed{T_2T_3 = KA \cdot \sin A}$.
KB – діаметр кола, описаного навколо KT_3BT_1, . тоді $\dfrac{T_1T_3}{\sin B} = KB$, і $\boxed{T_1T_3 = KB \cdot \sin B}$.
Аналогічно KC – діаметр кола, описаного навколо KT_2T_1C, звідки $\dfrac{T_1T_2}{\sin C} = KC$ (теорема синусів для ΔCT_2T_1), або $\boxed{T_1T_2 = KC \cdot \sin C}$.
Враховуючи те, що $T_1T_3 = T_1T_2 + T_2T_3$,
отримаємо: $KB \cdot \sin B = KC \cdot \sin C + KA \cdot \sin A$, або $KB \cdot \dfrac{b}{2R} = KA \cdot \dfrac{a}{2R} + KC \cdot \dfrac{c}{2R}$, або, після скорочення на $2R$, $\boxed{KB \cdot b = KA \cdot a + KC \cdot c}$. Це вже і є теоремою Птоломея для вписаного в коло

чотирикутника $KABC$ (дійсно, KB і b – його діагоналі; KA і a та KC і c – пари протилежних сторін).

Перед тим, як запропонувати декілька задач для самостійного розв'язання, доведемо *узагальнену теорему про пряму Симсона-Уоллеса.*

Теорема 2 (узагальнена). З довільної точки K описаного навколо трикутника ABC кола проведено прямі, що перетинають BC, AC і продовження AB в точках T_1; T_2 і T_3 відповідно (*мал.*14) – під рівними кутами α. Довести, що і в цьому випадку $T_1 - T_2 - T_3$ – одна пряма.

<u>*Мал.*14</u>



<u>Доведення</u>. Щоб довести теорему, покажемо рівність кутів 1 і 2.

Оскільки $\angle KT_2A = 180° - \alpha$ (суміжний з кутом KT_2C), то навколо чотирикутника KT_3AT_2 можна описати коло, внаслідок чого $\angle 1 = \angle 3$.

Навколо KT_2T_1C також можна описати коло ($\angle KT_2C = \angle KT_1C = \alpha$) і $\angle 2 = \angle 4$.

Можна описати коло і навколо KT_3BT_1 ($\angle KT_1B = 180° - \alpha$ як суміжний з кутом KT_1C).

Оскільки чотирикутники $KABC$ і KT_3BT_1 вписані, то $\angle CKA = \angle T_1KT_3 = 180° - B$. Звідки випливає, що $\angle 3 = \angle 4$, або $\angle 1 = \angle 2$. Теорему доведено.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 13. Пряма Симсона точки K кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC, ділить радіус OK навпіл. Доведіть.

Задача 14. Доведіть теорему про пряму Симсона за допомогою теореми Менелая.

Задача 15. Якщо основи перпендикулярів, проведених з точки K до сторін трикутника ABC (або їх продовжень) належать одній прямій, то точка K належить описаному навколо трикутника ABC колу. Доведіть! (задача, обернена до теореми про пряму Симсона).

Задача 16. Доведіть, що прямі Симсона діаметрально протилежних точок перпендикулярні, і що вони перетинаються на колі 9 точок трикутника ABC.

Задача 17. Відновіть ΔABC за кутом A та його *прямою Ейлера* (прямою, що містить центр описаного кола O і ортоцентр H).

Задача 18. Якщо через точку K описаного навколо трикутника ABC кола провести три довільні хорди і на кожній з них як на діаметрі побудувати коло, то ці кола попарно перетнуться в трьох точках, які належать одній прямій (*теорема Сальмона*).

Задача 19. $ABCD$ – вписаний чотирикутник. K – довільна точка кола. Для точки K і кожного з трикутників ABC, BCD, CDA, DAB існують свої прямі Симона. Довести, що проекції точки K на ці прямі Симсона належать одній прямій – *прямій Симсона чотирикутника*.

Література.

1) Боголюбов А.Н. Математики. Механики. Биографический справочник.
Киев, “Наукова думка”, 1983.
2) Бородин А.Н., Бугай А.С. Биографический словарь деятелей в области математики.
Киев, “Радянська школа”, 1979.
3) Глейзер Г.И. История математики в школе $\text{IX}-\text{X}$ классы.
Москва, “Просвещение”, 1983.
4) Зетель С.И. Новая геометрия треугольника.
Москва, “Учпедгиз”, 1940.
5) Коксетер Г.С.М., Грейцер С.Л. Новые встречи с геометрией.
Москва, “Наука”, 1978
6) Кушнір І.А. Методи розв’язання задач з геометрії.
Київ, “Абрис”, 1994
7) Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Часть I.
Москва, “Наука”, 1991
8) Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия (библиотечка “Квант”).
Москва, “Наука”, 1986