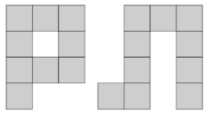
XXVIII олімпіада з математики Русанівського ліцею

6 клас (12.04.2025)

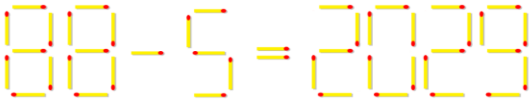
1 тур



1. Скільки прямокутників, які складаються з маленьких сірих клітинок, можна знайти на рисунку?

2. На дні народження Ади 12 гостей із різних родин з'їли 5 піц. Відомо, що кожна дитина з'їла $\frac{1}{2}$ піци, кожен тато – $\frac{1}{3}$ піци, а кожна мама – $\frac{1}{4}$ піци. Скільки було на святі дітей, скільки тат і скільки мам, якщо відомо, що Богдана прийшла з татом, а Василь – із мамою?

3. Перекладіть чотири сірники так, щоб отримати правильну рівність:



Малюнок Д.Загуменна, 9 клас

4. Вовк і заєць помітили один одного. Початкову відстань між ними вовк міг би подолати за 5 стрибків, а заєць – за 15 стрибків. Заєць почав тікати від вовка, а вовк кинувся в погоню і наздогнав зайця за 15 стрибків. Скільки стрибків встигає зробити заєць за час, коли вовк робить один стрибок?

Для вступу до Рл реєструйся за Qr-кодом

5. Рибалки Любомир та Мирослав ловили рибу в Русанівському каналі. Відомо, що і в суботу, і у неділю відсоток щук серед риб, спійманих Любомиром за день, був більше, ніж відсоток щук серед риб, спійманих Мирославом за день. Чи може виявитися, що відсоток щук серед риб, спійманих Любомиром за обидва вихідні разом, менше, ніж у Мирослава?

БАЖАЄМО УСПІХІВ

Користуватися будь якими електронними засобами заборонено.

Результати на сайті: www.rl.kyiv.ua

Термін виконання роботи 2 год.

XXVIII олімпіада з математики Русанівського ліцею

6 клас (12.04.2025)

2 тур

Малюнок В.Бахметова, 9 клас

6. Чи знайдеться рядок із п'яти натуральних чисел, у якому кожне наступне число ділиться на попереднє, але має меншу суму цифр?

7. Петрик замінив у правильному прикладі цифри літерами і отримав ребус

$$РЛ + ОЛ + ІМ = ПІ + АДА.$$

Відомо, що однакові літери відповідають однаковим цифрам, різні – різним, а цифри 1 у ребусі взагалі немає.

Чому може дорівнювати число ***АДА***?

8. Знайдіть прямокутник, який можна повністю розрізати на куточки з чотирьох клітинок, але не можна розрізати на прямокутники розміром 4×2.

Для вступу до Рл реєструйся за Qr-кодом

БАЖАЄМО УСПІХІВ

Користуватися будь якими електронними засобами заборонено.

Результати на сайті: www.rl.kyiv.ua

.Термін виконання роботи (разом з першим туром) 3 год.

XXVIII олімпіада з математики Русанівського ліцею

6 клас (12.04.2025)

3 тур

9. Є 12 гир різної ваги та терези з трьома шальками. За одне зважування можна дізнатися про будь-які три гирі, яка серед них найважча, яка середня та яка найлегша. Доведіть, що за 7 зважувань можна знайти найважчу гирю та другу за вагою гирю.

10. В одній із вершин куба сидить муха. Павук за один крок може перевірити три вершини куба. Якщо муха знаходиться в одній із цих вершин, павук її ловить. Інакше муха перелітає в одну із сусідніх вершин, і все повторюється. Доведіть, що павук гарантовано може спіймати муху за скінченну кількість кроків.

Малюнок В.Печененко, 9 клас

БАЖАЄМО УСПІХІВ

Користуватися будь якими електронними засобами заборонено.

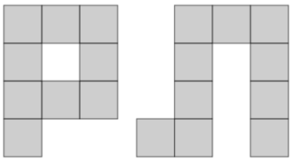
Результати на сайті: www.rl.kyiv.ua

.Термін виконання роботи (разом з першим та другим туром) 3 год.

РОЗВ'ЯЗАННЯ
6 КЛАС

1 тур

1. Скільки прямокутників, які складаються з маленьких сірих клітинок, можна знайти на рисунку?



Розв'язання. Кожен прямокутник на рисунку є частиною горизонтальної або вертикальної смуги з 2, 3 або 4 клітинок. Неважко порахувати, що у смузі із чотирьох клітинок містяться 10 прямокутників (чотири розміру 1×1, три розміру 1×2, два розміру 1×3 та один розміру 1×4), у смузі з трьох клітинок – 6 прямокутників, а у смузі з двох клітинок – 3 прямокутники. Тому у літері «Р» можна знайти $10 + 3 \cdot 6 - 4 = 24$ прямокутники (тут враховано, що чотири прямокутники розміру 1×1 належать і горизонтальній, і вертикальній смузі), а у літері «Л» містяться $2 \cdot 10 + 6 + 3 - 3 = 26$ прямокутників.
Відповідь: 50 прямокутників.

2. На дні народження Ади 12 гостей із різних родин з'їли 5 піц. Відомо, що кожна дитина з'їла $\frac{1}{2}$ піци, кожен тато – $\frac{1}{3}$ піци, а кожна мама – $\frac{1}{4}$ піци. Скільки було на святі дітей, скільки тат і скільки мам, якщо відомо, що Богдана прийшла з татом, а Василь – із мамою?

Розв'язання. I спосіб. Нехай було d дітей, t тат і m мам. Тоді $d + t + m = 12$ та $\frac{d}{2} + \frac{t}{3} + \frac{m}{4} = 5.$ Помножимо другу рівність на 12, аби позбутися знаменників: $6d + 4t + 3m = 60$. Тепер
$$6d + 4t + 3m - 3(d + t + m) = 3d + t = 24,$$
звідки $d < 8$, бо $t \geq 1$ (серед гостей був тато Богдани), та
$$6d + 4t + 3m - 4(d + t + m) = 2d - m = 12,$$
звідки $d > 6$, бо $m \geq 1$ (серед гостей була мама Василя). Отже, $d = 7$, а тому $t = 3$ та $m = 2$.

II спосіб. Як і в I способі, дістаємо рівняння $d + t + m = 12$ та $\frac{d}{2} + \frac{t}{3} + \frac{m}{4} = 5.$ Зауважимо, що число t ділиться на 3, бо інакше $\frac{d}{2} + \frac{t}{3} + \frac{m}{4}$ не буде цілим. Оскільки на святі були хоча б один тато та хоча б одна мама, то t може дорівнювати лише 3, 6 або 9. При $t = 3$ з рівнянь дістаємо $d = 7, m = 2$. При $t = 6$ дістаємо $d = 6, m = 0$. При $t = 9$ дістаємо $d = 5, m = -2$. Останні два варіанти не задовольняють умову.
Відповідь: 7 дітей, 3 тата і 2 мами.

3. Перекладіть чотири сірники так, щоб отримати правильну рівність:

Відповідь:

4. Вовк і заєць помітили один одного. Початкову відстань між ними вовк міг би подолати за 5 стрибків, а заєць – за 15 стрибків. Заєць почав тікати від вовка, а вовк кинувся в погоню і наздогнав зайця за 15 стрибків. Скільки стрибків встигає зробити заєць за час, коли вовк робить один стрибок?

Розв'язання. Один стрибок вовка має таку ж довжину, як три стрибки зайця. Вовк подолав початкову відстань до зайця за 5 стрибків, а потім зробив ще 10 стрибків. Тому під час погоні заєць пробіг відстань, яка відповідає 10 стрибкам вовка, або 30 своїм стрибкам. Отже, за один і той самий час вовк робить 15 стрибків, а заєць 30 стрибків. Тому заєць робить два стрибки, коли вовк робить один стрибок.
Відповідь: 2.

5. Рибалки Любомир та Мирослав ловили рибу в Русанівському каналі. Відомо, що і в суботу, і у неділю відсоток щук серед риб, спійманих Любомиром за день, був більше, ніж відсоток щук серед риб, спійманих Мирославом за день. Чи може виявитися, що відсоток щук серед риб, спійманих Любомиром за обидва вихідні разом, менше, ніж у Мирослава?

Розв'язання. Нехай у суботу Любомир спіймав 10 риб, серед яких 9 щук, а Мирослав – 20 риб, серед яких 17 щук. У неділю Любомир спіймав 20 риб, серед яких 3 щуки, а Мирослав – 10 риб, серед яких 1 щука[1]. Маємо $\frac{9}{10} = \frac{18}{20} > \frac{17}{20}$ та $\frac{3}{20} > \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$. З іншого боку, загальний улов кожного з рибалок за вихідні становить 30 риб, але Мирослав спіймав 18 щук, а Любомир – лише 12, тобто у Любомира відсоток щук менше.

Відповідь: так, може.

2 тур

6. Чи знайдеться рядок із п'яти натуральних чисел, у якому кожне наступне число ділиться на попереднє, але має меншу суму цифр?

Відповідь: Так. Наприклад, 8, 16, 400, 2000, 10000.

Зауваження. Покажемо, як підібрати приклад навіть з більшою кількістю чисел. Розглянемо декілька степенів двійки, кожні два з яких мають різну суму цифр, і запишемо їх так, аби кожне наступне число мало меншу суму цифр, ніж попереднє. Наприклад, візьмемо числа $128, 64, 8, 16, 32, 4, 2, 1$. Тепер будемо рухатися зліва направо і дописувати до кожного числа стільки нулів, скільки потрібно, аби воно стало ділитися на попереднє:

$$128, 640, 80000, 160000, 320000, 40000000, 200000000, 1000000000.$$

7. Петрик замінив у правильному прикладі цифри літерами і отримав ребус

$$\mathcal{PA} + \mathcal{OA} + \mathcal{IM} = \mathcal{\Pi I} + \mathcal{ADA}.$$

Відомо, що однакові літери відповідають однаковим цифрам, різні – різним, а цифри 1 у ребусі взагалі немає. Чому може дорівнювати число $\mathcal{ADA}$?

Розв'язання. Очевидно, що ліва частина нерівності менша за 300, отже $\mathcal{A} \leq 3$. Оскільки $\mathcal{A} \neq 0$, бо це перша цифра числа, та $\mathcal{A} \neq 1$, то $\mathcal{A} = 2$. Тепер можемо записати

$$10\mathcal{P} + \mathcal{A} + 10\mathcal{O} + \mathcal{A} + 10\mathcal{I} + \mathcal{M} = 10\mathcal{\Pi} + \mathcal{I} + 202 + 10\mathcal{D},$$

$$\text{тобто } 10\mathcal{D} = 10\mathcal{P} + 10\mathcal{O} + 9\mathcal{I} + 2\mathcal{A} + \mathcal{M} - 10\mathcal{\Pi} - 202.$$

Значення цього виразу буде найбільшим, якщо $\mathcal{P} = 9$ та $\mathcal{O} = 8$ (або навпаки), $\mathcal{I} = 7$, $\mathcal{A} = 6$, $\mathcal{M} = 5$, а $\mathcal{\Pi}$ є найменшим можливим. Оскільки $\mathcal{\Pi} \neq 0$, бо це перша цифра числа, $\mathcal{\Pi} \neq 1$ за умовою та $\mathcal{\Pi} \neq \mathcal{A} = 2$, то $\mathcal{\Pi} \geq 3$. Таким чином,

$$10\mathcal{D} \leq 10 \cdot 9 + 10 \cdot 8 + 9 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 5 - 10 \cdot 3 - 202 = 18,$$

а отже $\mathcal{D} = 0$ та $\mathcal{ADA} = 202$.

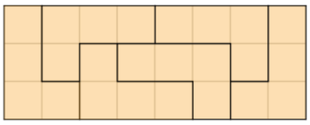
Відповідь: $\mathcal{ADA} = 202$.

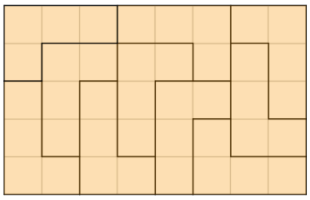
Зауваження. Початковий приклад Петрика міг бути, наприклад, таким:

$$95 + 75 + 68 = 36 + 202.$$

8. Знайдіть прямокутник, який можна повністю розрізати на куточки з чотирьох клітинок, але не можна розрізати на прямокутники розміром 4×2.

Розв'язання. Умову задовольняють, наприклад, прямокутники розміру 3×8 або 5×8. Справді, кожен з них можна розрізати на куточки, як показано на рисунку. З іншого боку, якщо одна зі сторін прямокутника непарна, його очевидно не можна розрізати навіть на квадрати розміру 2×2.





Зауваження. Можна показати, що прямокутник розміру $a \times b$ можна розрізати на куточки з чотирьох клітинок тоді й лише тоді, коли $a > 1$, $b > 1$ та ab ділиться на 8.

[1] Вочевидь, щуки зробили висновки і стали обачнішими :)

3 тур

9. Є 12 гир різної ваги та терези з трьома шальками. За одне зважування можна дізнатися про будь-які три гирі, яка серед них найважча, яка середня та яка найлегша. Доведіть, що за 7 зважувань можна знайти найважчу гирю та другу за вагою гирю.

Розв'язання. Розіб'ємо гирі на чотири групи по три гирі та першими 4 зважуваннями знайдемо першу, другу та третю за вагою гирі у кожній групі. Позначимо A, B, C та D гирі, які виявилися найважчими у групах. Зрозуміло, що найважча гиря це одна з них. П'ятим зважуванням порівняємо гирі A, B, C. Нехай для визначеності ваги гирь впорядковані так: $m_A > m_B > m_C$. Шостим зважуванням порівняємо гирі A, B та D. Оскільки ми вже знаємо, що $m_A > m_B$, результати можуть бути лише такими:

1) $m_A > m_B > m_D$. У цьому випадку найважча гиря це A, а друга за вагою – або B, або гиря, яка була другою у групі з гирею A.

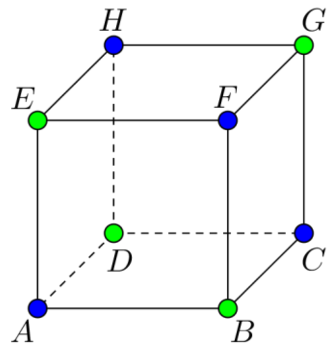
2) $m_A > m_D > m_B$. У цьому випадку найважча гиря це A, а друга за вагою – або D, або гиря, яка була другою у групі з гирею A.

3) $m_D > m_A > m_B$. У цьому випадку найважча гиря це D, а друга за вагою – або A, або гиря, яка була другою у групі з гирею D.

У кожному з випадків сьоме зважування дозволяє знайти другу за вагою гирю.

10. В одній із вершин куба сидить муха. Павук за один крок може перевірити три вершини куба. Якщо муха знаходиться в одній із цих вершин, павук її ловить. Інакше муха перелітає в одну із сусідніх вершин, і все повторюється. Доведіть, що павук гарантовано може спіймати муху за скінченну кількість кроків.

Розв'язання. Пофарбуємо та позначимо вершини куба, як показано на рисунку. Кожного разу муха перелітає у вершину іншого кольору. Нехай першим кроком павук перевірить вершини C, F, H. Якщо спочатку муха була у синій вершині, то або павук одразу її спіймав, або муха була у вершині A і перелетіла в одну з вершин B, D, E. Другим кроком павук перевірить ці три вершини. Якщо муху досі не спіймано, то спочатку вона була у зеленій вершині і тепер знову знаходиться у зеленій вершині. Третім кроком павук перевірить вершини B, D, E, а четвертим – вершини C, F, H. Щонайбільше після четвертого кроку муху буде спіймано.



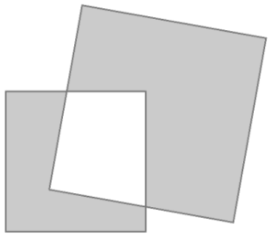
XXVIII олімпіада з математики Русанівського ліцею

7 клас (12.04.2025)

1 тур

1. Довести, що число $1 + 2024 + 2024^2 + 2024^3 + \cdots + 2024^{2025}$ ділиться на 81.

2. На рисунку пофарбовано 52% площі меншого квадрата та 73% площі більшого квадрата. Знайдіть відношення сторони більшого квадрата до сторони меншого квадрата.



3. Сума трьох натуральних чисел дорівнює 2025. Чи може добуток цих чисел закінчуватися на більше, ніж сім нулів?

4. (*Гліб Databasesородавко*) Нехай ABC – прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), AL – його бісектриса та N – середина AL. На гіпотенузі AB обрали точку T так, що $TN \perp AL$. Доведіть, що коло з центром у точці T та радіусом TA дотикається до катета BC.

5. (*Матвій Курський*) Нехай $ABCD$ – прямокутник. На стороні AD знайшлися такі точки P та Q, що $PC = BC$ та $PQ = CQ$. Доведіть, що $\angle PCQ = 2\angle ABP$.

Для вступу до Рл реєструйся за Qr-кодом

БАЖАЄМО УСПІХІВ

Користуватися будь якими електронними засобами заборонено.

Результати на сайті: www.rl.kyiv.ua

Термін виконання роботи 2 год.

XXVIII олімпіада з математики Русанівського ліцею

7 клас (12.04.2025)

2 тур

6. Розставте у записі

$$\frac{1}{a} * \frac{1}{a} * \frac{1}{a} * \frac{1}{a} * \frac{1}{a} = (a+1)(a-1)$$

дужки та знаки арифметичних дій (додавання, віднімання, множення або ділення) замість зірочок так, аби утворилася рівність, яка є правильною при всіх $a \neq 0$.

7. На дошці було записано 100 чисел. Коли кожне з них збільшили на 1, сума квадратів чисел на дошці не змінилася. Потім кожне число ще раз збільшили на 1. Чи зміниться сума квадратів на цей раз? Якщо так, то на скільки?

8. (*Олексій Карлюченко*) Вписане коло трикутника ABC, у якому $AB \neq AC$, дотикається до сторін BC, AC та AB у точках K, N та T відповідно. Точка M – середина BC. Пряма, яка проходить через точку M паралельно до NT, перетинає прямі AB і AC у точках D і E відповідно. Доведіть, що $BD = CE$.

БАЖАЄМО УСПІХІВ

Користуватися будь-якими електронними засобами заборонено.

Результати на сайті: www.rl.kyiv.ua

Термін виконання роботи (разом з першим туром) 3 год.

XXVIII олімпіада з математики Русанівського ліцею
7 клас (12.04.2025)
3 тур

9. Про 100 різних натуральних чисел відомо, що їх можна розбити на 50 пар так, що сума чисел у кожній парі більша за 1000. Усі 100 чисел виписали у порядку зростання. Чи обов’язково сума 40-го та 61-го чисел також буде більшою за 1000?

10. (*Матвій Курський*) Нехай D, E та F – середини сторін BC, AC та AB трикутника ABC. У площині трикутника ABC обрали точку X, для якої сума $XD + XE + XF$ більша за половину периметра трикутника ABC. Доведіть, що хоча б один з кутів $\angle AXB$, $\angle BXC$ та $\angle AXC$ є гострим.

БАЖАЄМО УСПІХІВ

Користуватися будь-якими електронними засобами заборонено.
Результати на сайті: www.rl.kyiv.ua
Термін виконання роботи (разом з першим та другим туром) 3 год.

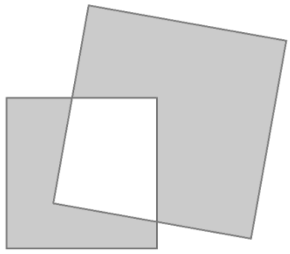
<u>РОЗВ'ЯЗАННЯ</u>
<u>7 КЛАС</u>

1 тур

1. Довести, що число $1 + 2024 + 2024^2 + 2024^3 + \cdots + 2024^{2025}$ ділиться на 81.

Розв'язання. Число $1 + 2024 + 2024^2 + 2024^3 + \cdots + 2024^{2025} =$
$$= (1 + 2024) + 2024^2(1 + 2024) + \cdots + 2024^{2024}(1 + 2024)$$
ділиться на 2025, а отже і на 81, бо $2025 = 81 \cdot 25$.

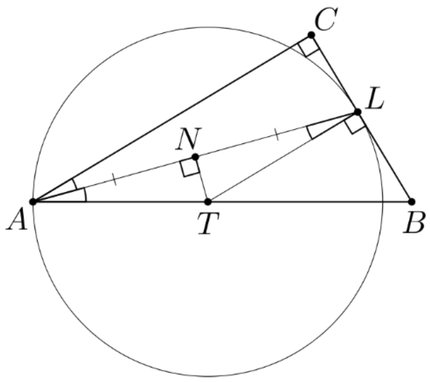
2. На рисунку пофарбовано 52% площі меншого квадрата та 73% площі більшого квадрата. Знайдіть відношення сторони більшого квадрата до сторони меншого квадрата.



Розв'язання. Позначимо сторони меншого та більшого квадратів a та b відповідно. Спільна незафарбована частина становить 48% від площі меншого квадрата та 27% від площі більшого квадрата. Отже, $0{,}48a^2 = 0{,}27b^2$, звідки $16a^2 = 9b^2$, тобто $b = \frac{4}{3}a$.

Відповідь: $b = \frac{4}{3}a$.

3. (*Гліб Databaseавко*) Нехай ABC – прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), AL – його бісектриса та N – середина AL. На гіпотенузі AB обрали точку T так, що $TN \perp AL$. Доведіть, що коло з центром у точці T та радіусом TA дотикається до катета BC.

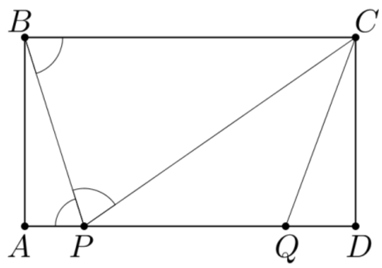


Розв'язання. Прямокутні трикутники ANT та LNT рівні за двома катетами. Тому $\angle TLN = \angle TAN = \angle NAC$, звідки $TL \parallel AC$, та $AT = LT$. Оскільки $AC \perp BC$ та $TL \parallel AC$, то $TL \perp BC$. Тому коло з центром T та радіусом $TL = TA$ дотикається до BC у точці L.

4. Сума трьох натуральних чисел дорівнює 2025. Чи може добуток цих чисел закінчуватися на більше, ніж сім нулів?

Розв'язання. Так, може: $2025 = 600 + 800 + 625$ та $600 \cdot 800 \cdot 625 = 300000000$.

5. (*Матвій Курський*) Нехай $ABCD$ – прямокутник. На стороні AD знайшлися такі точки P та Q, що $PC = BC$ та $PQ = CQ$. Доведіть, що $\angle PCQ = 2\angle ABP$.



Розв'язання. Позначимо $\angle APB = \alpha$. Тоді $\angle PBC = \angle APB = \alpha$, бо $AD \parallel BC$, та $\angle BPC = \angle PBC = \alpha$, бо трикутник BCP рівнобедрений. Тому $\angle ABP = 90° - \alpha$, а у рівнобедреному трикутнику PCQ
$$\angle PCQ = \angle CPQ = 180° - \angle APB - \angle BPC = 180° - 2\alpha = 2\angle ABP.$$

2 тур

6. Розставте у записі
$$\frac{1}{a} * \frac{1}{a} * \frac{1}{a} * \frac{1}{a} * \frac{1}{a} = (a+1)(a-1)$$
дужки та знаки арифметичних дій (додавання, віднімання, множення або ділення) замість зірочок так, аби утворилася рівність, яка є правильною при всіх $a \neq 0$.

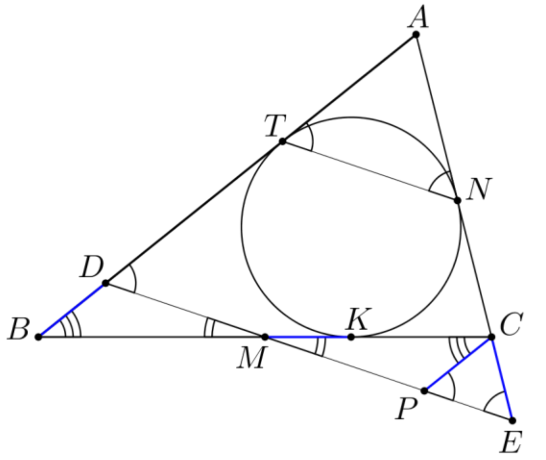
Розв'язання. Маємо $\left(\frac{1}{a} : \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a}\right) : \frac{1}{a} = \left(a - \frac{1}{a}\right) \cdot a = a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$.

7. На дошці було записано 100 чисел. Коли кожне з них збільшили на 1, сума квадратів чисел на дошці не змінилася. Потім кожне число ще раз збільшили на 1. Чи зміниться сума квадратів на цей раз? Якщо так, то на скільки?

Розв'язання. Нехай на дошці були числа $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$. Якщо число x замінили на $x + 1$, а потім на $x + 2$, то квадрат числа змінився спочатку на $(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$, а потім на $(x+2)^2 - (x+1)^2 = 2x + 3$. Тому

першого разу сума квадратів усіх чисел змінилася на $(2x_1+1)+\cdots+(2x_{100}+1)=2(x_1+\cdots+x_{100})+100$, а другого разу на $(2x_1+3)+\cdots+(2x_{100}+3)=2(x_1+\cdots+x_{100})+300$. За умовою $2(x_1+\cdots+x_{100})+100=0$, тому $2(x_1+\cdots+x_{100})+300=200$. Отже, другого разу сума квадратів збільшиться на 200.
Відповідь: збільшиться на 200.

8. (*Олексій Карлюченко*) Вписане коло трикутника ABC, у якому $AB\neq AC$, дотикається до сторін BC, AC та AB у точках K, N та T відповідно. Точка M – середина BC. Пряма, яка проходить через точку M паралельно до NT, перетинає прямі AB і AC у точках D і E відповідно. Доведіть, що $BD=CE$.



Розв'язання. Оскільки $AT=AN$ як дотичні, трикутник ATN рівнобедрений. Позначимо $\angle ATN=\angle ANT=\alpha$. Але $DE\parallel NT$, отже $\angle ADE=\angle ATN=\alpha$, $\angle AED=\angle ANT=\alpha$ як відповідні кути при паралельних прямих, тобто трикутник ADE рівнобедрений. Відмітимо на прямій DE точку P так, що $CP\parallel AB$. Тоді $\angle CPE=\angle ADE=\alpha$ як відповідні кути при паралельних прямих, тому трикутник CPE рівнобедрений та $CP=CE$. Трикутники BDM та CPM рівні за стороною та двома кутами (справді, $BM=CM$, $\angle BMD=\angle CMP$ як вертикальні та $\angle DBM=\angle PCM$, бо $CP\parallel AB$), тому $BD=CP=CE$.

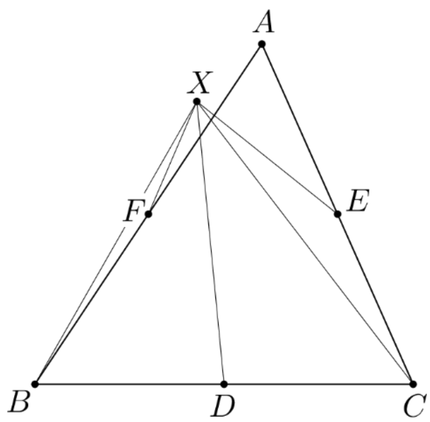
Зауваження. Покажемо, що також $MK=BD=CE$. Позначимо сторони трикутника $BC=a$, $AC=b$ та $AB=c$. Нехай для визначеності $b>c$. Неважко перевірити, що тоді точка D лежить на стороні AB, а точка E – на продовженні сторони AC. Отже, с $=AD+BD$ та $b=AE-CE$. Але $AD=AE$ та $BD=CE$, тому $b=AD-BD$. Звідси $AD=AE=\frac{b+c}{2}$ та $BD=CE=\frac{b-c}{2}$. Оскільки $BK=p-b=\frac{a+c-b}{2}$, де p – півпериметр трикутника, та $BM=\frac{a}{2}$, то $MK=BK-BM=\frac{b-c}{2}=BD=CE$.

3 тур

9. Про 100 різних натуральних чисел відомо, що їх можна розбити на 50 пар так, що сума чисел у кожній парі більша за 1000. Усі 100 чисел виписали у порядку зростання. Чи обов'язково сума 40-го та 61-го чисел також буде більшою за 1000?
Розв'язання. Позначимо числа $a_1<a_2<\cdots<a_{100}$. Припустимо, що $a_{40}+a_{61}\leq 1000$. Тоді $a_i+a_{61}\leq 1000$ при кожному $i=1,2,\dots,40$. Тому кожне з 40 чисел $a_1,a_2,\dots,a_{40}$ має бути в парі з деяким числом, більшим за a_{61}, тобто з одним із 39 чисел $a_{62},\dots,a_{100}$. Але тоді для деякого числа пари не вистачить, суперечність.
Відповідь: так, обов'язково.

10. (*Матвій Курський*) Нехай D, E та F – середини сторін BC, AC та AB трикутника ABC. У площині трикутника ABC обрали точку X, для якої сума $XD+XE+XF$ більша за половину периметра трикутника ABC. Доведіть, що хоча б один з кутів $\angle AXB$, $\angle BXC$ та $\angle AXC$ є гострим.

Розв'язання. Якщо одночасно виконуються нерівності
$$XD\leq\frac{BC}{2}, XE\leq\frac{AC}{2}, XF\leq\frac{AB}{2},$$
то сума $XD+XE+XF$ не перевищує половини периметра трикутника ABC. Отже, принаймні одна з цих нерівностей неправильна. Нехай для визначеності $XD>\frac{BC}{2}$. Покажемо, що тоді кут $\angle BXC$ гострий. Справді, оскільки $BD=CD=\frac{BC}{2}<XD$ та проти більшої сторони трикутника лежить більший кут, то $\angle XBD>\angle BXD$ та $\angle XCD>\angle CXD$. Отже, у трикутнику BXC маємо
$$\angle BXC=\angle BXD+\angle CXD<\angle XBC+\angle XCB,$$
звідки $2\angle BXC<\angle BXC+\angle XBC+\angle XCB=180°$, тобто $\angle BXC<90°$.



XXVIII олімпіада з математики Русанівського ліцею

8 клас (12.04.2025)

1. Нехай $0 < a < b < c < d$. Чи можуть квадратні тричлени $x^2 + ax + d$ та $x^2 + bx + c$ мати спільний корінь?

2. Назвемо натуральне число *поважним*, якщо друга справа цифра у його десятковому записі це 9. Чи можна подати число 1001 як суму N поважних доданків а) при $N = 10$? б) при якому-небудь меншому N?

3. *(Михайло Плотніков)* Нехай CD – висота прямокутного трикутника $ABC(\angle C = 90°)$. На катетах AC та BC обрали точки E, K та F, L відповідно так, що $\angle EDF = 90°$, $AE = CK$ та $BF = CL$. Доведіть, що $EL \parallel FK$.

4. *(Вячеслав Павлюк)* Нехай H – точка перетину висот гострокутного трикутника ABC, ω – описане коло цього трикутника, W – точка перетину бісектриси кута BAC з колом ω, а Q – точка перетину кола ω та кола з діаметром AH. Відновіть трикутник ABC, якщо відомі лише точки A, W та Q.

5. (*Олександр Горбунов, учень 9 класу*) Нехай AH – висота гострокутного трикутника ABC, у якому $AB < AC$, M – середина сторони AC, P – точка перетину прямих AB та MH, BQ – діаметр кола, описаного навколо трикутника BPC. Доведіть, що $\angle BAH = \angle QAC$.

6. (*Яна Колісник, учениця 9 класу*) Знайдіть усі натуральні числа $k \geq 3$, при яких усі дільники числа $2k$ можна розбити на пари так, щоб сума чисел у кожній парі ділиться на $k + 1$.

Для вступу до Рл реєструйся за Qr-кодом

БАЖАЄМО УСПІХІВ

Користуватися будь-якими електронними засобами заборонено.

Результати на сайті: www.rl.kyiv.ua

Термін виконання роботи 4 год.

РОЗВ'ЯЗАННЯ
8 КЛАС

1. Нехай $0 < a < b < c < d$. Чи можуть квадратні тричлени $x^2 + ax + d$ та $x^2 + bx + c = 0$ мати спільний корінь?

Розв'язання. Припустимо, що $x = t$ – спільний корінь тричленів. Тоді

$$t^2 + at + d = t^2 + bt + c = 0.$$

Звідси $(t^2 + bt + c) - (t^2 + at + d) = (b - a)t + (c - d) = 0$, або $(b - a)t = d - c$, тобто

$$t = \frac{d - c}{b - a} > 0.$$

Але тоді $t^2 + at + d > 0$, суперечність.

Відповідь: не можуть.

2. Назвемо натуральне число *поважним*, якщо друга справа цифра у його десятковому записі це 9. Чи можна подати число 1001 як суму N поважних доданків а) при $N = 10$? б) при якому-небудь меншому N?

Розв'язання. а) Так. Наприклад, можна взяти такі доданки: $a_1 = a_2 = \cdots = a_9 = 90, a_{10} = 191$.

б) *І спосіб.* Нехай $1001 = a_1 + \cdots + a_N$, де числа $a_1, \dots, a_N$ поважні. Для кожного доданка a_i можна обрати таке натуральне число $1 \le b_i \le 10$, що $a_i + b_i$ ділиться на 100. Тоді сума

$$(a_1 + b_1) + \cdots + (a_N + b_N) = 1001 + (b_1 + \cdots + b_N)$$

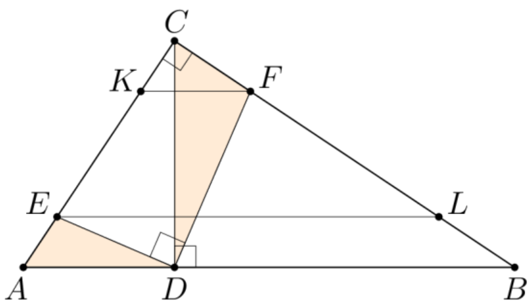
ділиться на 100. Звідси $99 \le b_1 + \cdots + b_N \le 10N$, тобто $N \ge 10$.

ІІ спосіб. Будемо додавати поважні числа у стовпчик. Якщо доданків два, то у розряді десятків за рахунок додавання двох цифр 9 утвориться цифра 8, а з розряду одиниць перейде 0 або 1, тому у розряді десятків суми буде стояти 8 або 9, а не 0. Якщо доданків три, то у розряді десятків утвориться цифра 7, а з розряду одиниць перейде 0, 1 або 2, тому у розряді десятків суми буде стояти 7, 8 або 9, а не 0. Аналогічно дістаємо, що у розряді десятків суми не може опинитися 0, якщо доданків від чотирьох до дев'яти.

Відповідь: а) так; б) ні.

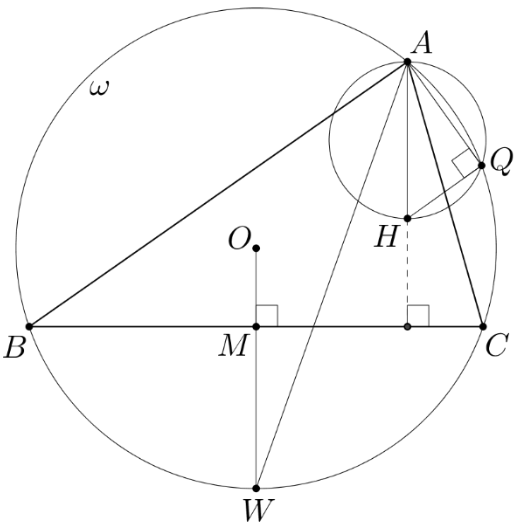
3. *(Михайло Плотніков)* Нехай CD – висота прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). На катетах AC та BC обрали точки E, K та F, L відповідно так, що $\angle EDF = 90°$, $AE = CK$ та $BF = CL$. Доведіть, що $EL \parallel FK$.

Розв'язання. Оскільки $AE \perp CF$, $AD \perp CD$ та $ED \perp FD$, то відповідні кути трикутників AED та CFD рівні як кути із взаємно перпендикулярними сторонами. Отже, трикутники AED та CFD подібні, звідки $\frac{AE}{ED} = \frac{CF}{FD}$. Аналогічно трикутники ECD та FBD подібні, звідки $\frac{ED}{EC} = \frac{FD}{FB}$. Отже, $\frac{AE}{EC} = \frac{CF}{FB}$. Але за умовою $AE = CK$ та $BF = CL$. Отже, $\frac{CK}{CE} = \frac{CF}{CL}$, а тому $EL \parallel FK$ за теоремою, оберненою до теореми про пропорційні відрізки.



4. *(Вячеслав Павлюк)* Нехай H – точка перетину висот гострокутного трикутника ABC, ω – описане коло цього трикутника, W – точка перетину бісектриси кута BAC з колом ω, а Q – точка перетину кола ω та кола з діаметром AH. Відновіть трикутник ABC, якщо відомі лише точки A, W та Q.

Розв'язання. Одразу будуємо коло ω як описане коло трикутника AWQ та знаходимо його центр – точку O. Тепер проводимо через точку A пряму, паралельну до OW, а через точку Q пряму, перпендикулярну до AQ. Ці прямі перетинаються в точці H. Нехай M_1 – середина BC. Добре відомо, що $OM_1 \parallel AH$ та $OM_1 = \frac{1}{2}AH$. Тому можна побудувати точку M_1 та провести через неї пряму, перпендикулярну до OM_1. Ця пряма перетне коло ω в точках B та C.

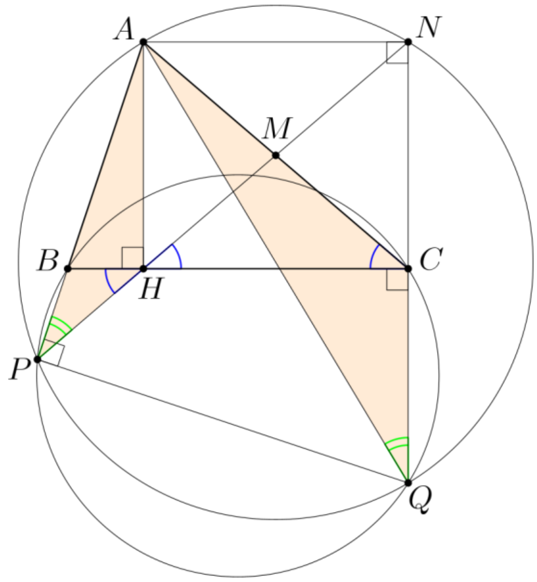


5. (*Олександр Горбунов, учень 9 класу*) Нехай AH – висота гострокутного трикутника ABC, у якому $AB < AC$, M – середина сторони AC, P – точка перетину прямих AB та MH, BQ – діаметр кола, описаного навколо трикутника BPC. Доведіть, що $\angle BAH = \angle QAC$.

Розв'язання. Добудуємо прямокутний трикутник AHC до прямокутника $AHCN$, у якому M є точкою перетину діагоналей. Оскільки $\angle BHP = \angle MHC = \angle MCH$, то

$$\angle AHP = 90° + \angle BHP = 90° + \angle MCH = \angle ACQ.$$

Оскільки $\angle BCN = \angle BCQ = 90°$, то $N - C - Q$ – одна пряма. Чотирикутник $ANQP$ вписаний, бо $\angle APQ = \angle ANQ = 90°$. Звідси $\angle APH = \angle APN = \angle AQN = \angle AQC$. Отже, у трикутниках APH та AQC є дві пари рівних кутів, а тому і $\angle BAH = \angle QAC$.



6. (*Яна Колісник, учениця 9 класу*) Знайдіть усі натуральні числа $k \geq 3$, при яких усі дільники числа $2k$ можна розбити на пари так, щоб сума чисел у кожній парі ділиться на $k + 1$.

Розв'язання. Числа $1, 2, k$ та $2k$ є різними дільниками числа $2k$. Якщо інших дільників немає, то всі дільники можна розбити на дві пари: $(1, k)$ та $(2, 2k + 2)$. Цей випадок має місце, коли k – непарне просте число або $k = 4$. Надалі будемо вважати, що у числа $2k$ є інші дільники, тобто дільники потрібно розбити хоча б на три пари. У кожній парі сума чисел не менша за $k + 1$, отже у кожну пару входить число, більше за $\frac{k}{2}$. Але найбільшими дільниками числа $2k$ є $2k$ та k, а наступний дільник або дорівнює $\frac{2k}{3}$ (за умови, що $\frac{2k}{3}$ – ціле число), або не перевищує $\frac{2k}{4} = \frac{k}{2}$. Тому пар дільників має бути рівно три, число $\frac{2k}{3}$ справді ціле, а числа $2k$, k та $\frac{2k}{3}$ входять у три різні пари.

Розглянемо пару, в яку входить число $\frac{2k}{3}$. Якщо друге число у цій парі не перевищує $\frac{2k}{6} = \frac{k}{3}$, то сума чисел у парі менша за k і не ділиться на $k + 1$, суперечність. Тому друге число у парі з $\frac{2k}{3}$ може дорівнювати лише $\frac{2k}{4} = \frac{k}{2}$ або $\frac{2k}{5}$. Сума чисел у цій парі менша за $2k + 2$, а тому має дорівнювати $k + 1$. Якщо $\frac{2k}{3} + \frac{k}{2} = k + 1$, то $k = 6$, а якщо $\frac{2k}{3} + \frac{2k}{5} = k + 1$, то $k = 15$. Залишається зробити перевірку. Для $k = 6$ число $2k = 12$ має дільники $1, 2, 3, 4, 6$ та 12, які розбиваються на пари (1,6), (2,12), (3,4) так, що у кожній парі сума ділиться на 7. Для $k = 15$ число $2k = 30$ має більше, ніж три пари дільників, а тому не задовольняє умову.

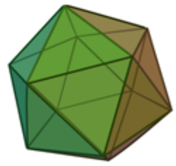
Відповідь: $k = 4$, $k = 6$ або k – довільне непарне просте число.

XXVIII олімпіада з математики Русанівського ліцею.
Командна олімпіада, 9-10 класи. (12.04.2025)

1. Знайдіть усі натуральні числа a, при яких десятковий запис добутку чисел $a-5$ та $a+5$ складається лише з дев'яток.

2. *(Михайло Сидоренко, учень 10 класу)* Нехай AD – медіана гострокутного трикутника ABC. Пряма AD вдруге перетинає описане коло у точці E. Пряма ℓ_C проходить через точку C перпендикулярно до AC, пряма ℓ_D – через точку D перпендикулярно до BC, а пряма ℓ_E – через точку E перпендикулярно до BE. Доведіть, що прямі ℓ_C, ℓ_D та ℓ_E перетинаються в одній точці.

3. Ікосаедр – це зображений на рисунку многогранник, який має 12 вершин і 20 граней; його грані — рівні рівносторонні трикутники. На кожній грані ікосаедра написали деяке натуральне число так, що сума всіх 20 чисел дорівнює 59. Покажіть, що знайдуться дві грані зі спільною вершиною, на яких записане одне й те саме число.



4. *(Матвій Курський)* Нехай *BD* та *CE* – бісектриси трикутника *ABC.* Точку *F* обрано так, що $EF \perp BD$ та $DF \perp CE$. Доведіть, що точка перетину медіан трикутника *DEF* лежить на бісектрисі кута *A.*

5. *(Григорій Філіпповський)* На площині зображено гострокутний трикутник *ABC* і його описане коло ω. Також відмічено ортоцентр трикутника *ABC* – точку *H.* Однією лінійкою побудуйте центр O кола ω.

6. Знайдіть усі натуральні числа $n \geq 2$, при яких числа від 1 до $2n$ можна розбити на дві групи $a_1, a_2, \dots, a_n$ та $b_1, b_2, \dots, b_n$ по n чисел у кожній так, що $a_1 a_2 \dots a_n + b_1 b_2 \dots b_n$ дає остачу 1 при діленні на $2n$.

7. *(Матвій Курський)* Нехай I – центр кола, вписаного у нерівнобедрений трикутник ABC, а ω – коло, описане навколо трикутника ABC. На дузі CAB кола ω знайшлася така точка $D \neq A$, що $AI = ID$. Точка K симетрична точці I відносно BC. Доведіть, що прямі DK та AI перетинаються на колі ω.

8. *(Олександр Толесніков)* Є вісім зовні однакових монет, серед яких чотири справжні монети вагою 10 г та чотири фальшиві монети вагою 9 г. Іржаві терези показують, яка шалька переважила, якщо загальна вага монет на лівій і правій шальці відрізняється хоча б на 2 г. Доведіть, що можна знайти всі фальшиві монети за 6 зважувань на іржавих терезах.

9. *(Михайло Сидоренко, учень 10 класу)* Нехай AD – висота гострокутного трикутника ABC, H – ортоцентр, O – центр кола ω, описаного навколо трикутника ABC. На стороні BC відмітили точку E так, що $HE \parallel AO$, а на колі ω точку Q так, що $\angle AQH = 90°$. Доведіть, що коло ω_1, описане навколо трикутника QED, дотикається до кола ω.

10. Нехай $0 \leq a, b, c, d \leq 1$. Доведіть нерівність
$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+d} + \frac{1}{1+d+a} \leq \frac{4}{1+2\sqrt[4]{abcd}}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ
9-10 КЛАС

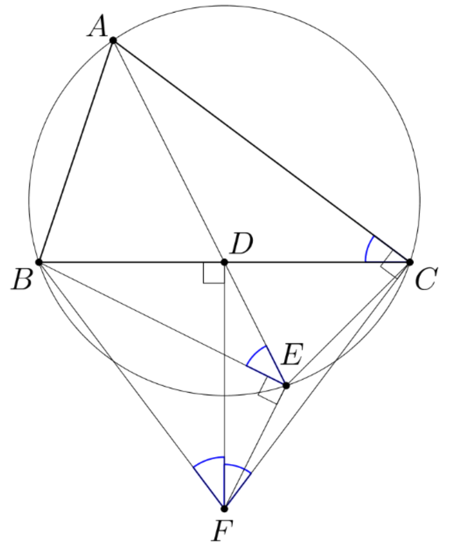
1. Знайдіть усі натуральні числа a, при яких десятковий запис добутку чисел $a-5$ та $a+5$ складається лише з дев'яток.

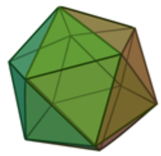
Розв'язання. Якщо $(a-5)(a+5) = 99\ldots9$ і дев'яток чотири або більше, то десятковий запис числа $a^2 = 99\ldots9 + 25$ закінчується на $\ldots 0024$. Тоді це число ділиться на 8 та не ділиться на 16, а тому не може бути повним квадратом, суперечність. Залишається перебрати варіанти $a^2 = 9 + 25$, $a^2 = 99 + 25$ та $a^2 = 999 + 25$. Лише в останньому з цих випадків дістаємо ціле значення a.

Відповідь: $a = 32$.

2. *(Михайло Сидоренко, учень 10 класу)* Нехай AD – медіана гострокутного трикутника ABC. Пряма AD вдруге перетинає описане коло у точці E. Пряма ℓ_C проходить через точку C перпендикулярно до AC, пряма ℓ_D – через точку D перпендикулярно до BC, а пряма ℓ_E – через точку E перпендикулярно до BE. Доведіть, що прямі ℓ_C, ℓ_D та ℓ_E перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Нехай F – точка перетину прямих ℓ_D та ℓ_E. Покажемо, що вона лежить і на прямій ℓ_C. Позначимо $\angle AEB = \angle ACB = \gamma$. Оскільки чотирикутник $BDEF$ вписаний у коло з діаметром BD, то $\angle BFD = \angle BED = \gamma$. У трикутнику BFC відрізок FD є медіаною, висотою і бісектрисою, тому $\angle CFD = \angle BFD = \gamma$, $\angle BCF = 90° - \gamma$ та $\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = 90°$. Тому $FC \perp AC$, що завершує доведення.



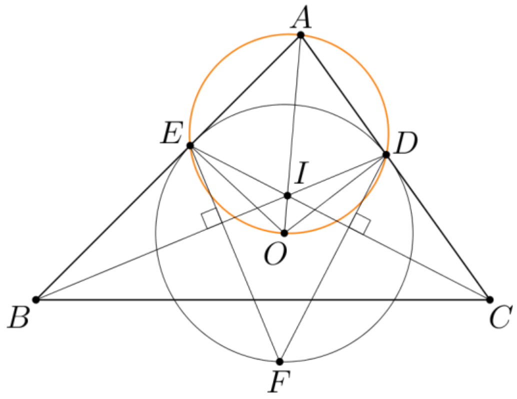


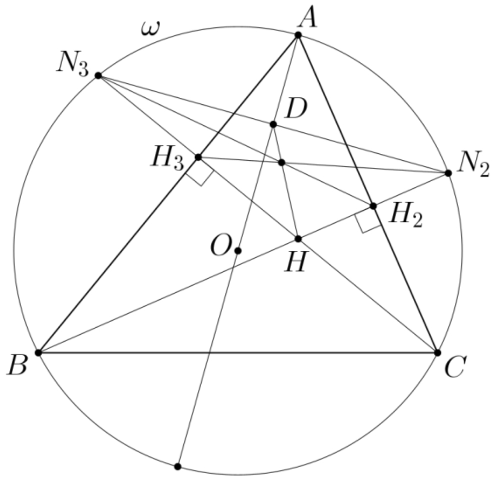
3. Ікосаедр – це зображений на рисунку многогранник, який має 12 вершин і 20 граней; його грані — рівні рівносторонні трикутники. На кожній грані ікосаедра написали деяке натуральне число так, що сума всіх 20 чисел дорівнює 59. Покажіть, що знайдуться дві грані зі спільною вершиною, на яких записане одне й те саме число.

Розв'язання. Кожна вершина ікосаедра є спільною для п'яти граней. Якщо числа на цих гранях не повторюються, то їхня сума не менша за $1+2+3+4+5 = 15$. Додамо такі суми для всіх вершин. Дістанемо $3 \cdot 59 = 177$, бо число на кожній грані враховується у сумах для рівно трьох вершин. Але сума 12 чисел, кожне з яких не менше за 15, є не меншою за $12 \cdot 15 = 180 > 177$, суперечність.

4. *(Матвій Курський)* Нехай *BD* та *CE* – бісектриси трикутника *ABC*. Точку F обрано так, що $EF \perp BD$ та $DF \perp CE$. Доведіть, що точка перетину медіан трикутника *DEF* лежить на бісектрисі кута *A*.

Розв'язання. Нехай I – точка перетину бісектрис трикутника ABC та O – центр описаного кола трикутника *DEF*. За умовою точка I є точкою перетину висот трикутника *DEF*. Оскільки точка перетину медіан, точка перетину висот та центр описаного кола будь-якого трикутника лежать на одній прямій (прямій Ейлера), достатньо показати, що центр описаного кола трикутника *DEF* лежить на бісектрисі кута *A*. Нехай $\angle BAC = \alpha$. Тоді $\angle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$, а оскільки $EF \perp BI$ та $DF \perp CI$, то $\angle EFD = 180° - \angle BIC = 90° - \frac{\alpha}{2}$ та $\angle EOD = 2\angle EFD = 180° - \alpha = 180° - \angle EAD$. Таким чином, чотирикутник $AEOD$ вписаний. Оскільки $OD = OE$ як радіуси, точка O є серединою дуги $\smile ED$, а отже лежить на бісектрисі кута EAD.





5. *(Григорій Філіпповський)* На площині зображено гострокутний трикутник ABC і його описане коло ω. Також відмічено ортоцентр трикутника ABC – точку H. Однією лінійкою побудуйте центр O кола ω.

Розв'язання. Проведемо промінь BH, який перетинає сторону AC у точці H_2, а описане коло у точці N_2, і промінь CH, який перетинає сторону AB у точці H_3, а описане коло у точці N_3. Добре відомо, що $HH_2 = H_2N_2$ та $HH_3 = H_3N_3$. Тому в трикутнику HN_2N_3 можна провести медіани N_2H_3 та N_3H_2, через їхню точку перетину провести третю медіану цього трикутника і дістати точку D, яка є серединою N_2N_3. Оскільки $\angle ACN_3 = \angle ABN_2 = 90° - \angle BAC$, точка A є серединою дуги $\smile N_2AN_3$. Тому пряма AD містить діаметр кола ω. Аналогічно будуємо діаметр, який проходить через точку B, та дістаємо центр O кола ω.

6. Знайдіть усі натуральні числа $n \geq 2$, при яких числа від 1 до $2n$ можна розбити на дві групи $a_1, a_2, \dots, a_n$ та $b_1, b_2, \dots, b_n$ по n чисел у кожній так, що $a_1a_2 \dots a_n + b_1b_2 \dots b_n$ дає остачу 1 при діленні на $2n$.

Розв'язання. Одне з чисел $a_1a_2 \dots a_n$ та $b_1b_2 \dots b_n$ має бути непарним, тому всі n непарних чисел від 1 до $2n$ мають увійти в одну групу, а всі n парних чисел від 1 до $2n$ – в іншу. Таким чином, $a_1a_2 \dots a_n + b_1b_2 \dots b_n = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) + 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n$. Оскільки добуток $2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n$ завжди ділиться на $2n$, залишається знайти n, при яких $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) - 1$ ділиться на $2n$. Це неможливо, якщо у числа n є непарний дільник $m > 1$, бо у цьому випадку $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ ділиться на m, а $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) - 1$ не ділиться. Отже, $n = 2^k$, де $k \geq 1$.

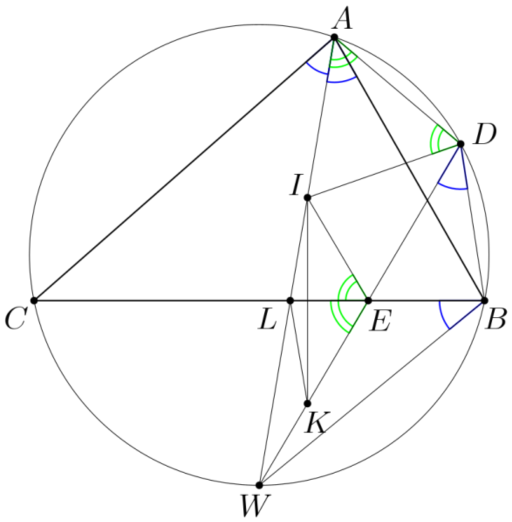
При $k = 1$ маємо $n = 2$, $2n = 4$ та $1 \cdot 3 - 1 = 2$ не ділиться на 4. Доведемо за індукцією, що $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2^{k+1} - 1) - 1$ ділиться на 2^{k+1} при всіх $k \geq 2$. При $k = 2$ маємо $n = 4$, $2n = 8$ та $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 104$ ділиться на 8. Припустимо, що при $k = \ell - 1$ число $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2^\ell - 1) - 1$ ділиться на 2^ℓ, тобто $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2^\ell - 1) = 1 + 2^\ell c$, де c ціле. Покажемо, що при $k = \ell$ число $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2^{\ell+1} - 1) - 1$ ділиться на $2^{\ell+1}$. Справді, при діленні на $2^{\ell+1}$ числа $2^\ell + 1$, $2^\ell + 3$, ..., $2^{\ell+1} - 3$, $2^{\ell+1} - 1$ дають такі ж остачі, як числа $-(2^\ell - 1)$, $-(2^\ell - 3)$, ..., -3, -1. Тому число $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2^{\ell+1} - 1)$ дає таку ж остачу, як

$$(1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2^{\ell+1} - 1))^2 \cdot (-1)^{2^{\ell-1}} = (1 + 2^\ell c)^2 = 1 + 2^{\ell+1}c + 2^{2\ell}c^2,$$

а отже $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2^{\ell+1} - 1) - 1$ ділиться на $2^{\ell+1}$.

Відповідь: $n = 2^k$, де $k \geq 2$.

7. *(Матвій Курський)* Нехай I – центр кола, вписаного у нерівнобедрений трикутник ABC, а ω – коло, описане навколо трикутника ABC. На дузі CAB кола ω знайшлася така точка $D \neq A$, що $AI = ID$. Точка K симетрична точці I відносно BC. Доведіть, що прямі DK та AI перетинаються на колі ω.



Розв'язання. Без обмеження загальності будемо вважати, що точка D належить дузі AB. Нехай продовження бісектриси AL перетинає коло ω у точці W, а відрізок WD перетинає BC у точці E. Трикутники WDB та WBE подібні (кут при вершині W спільний, $\angle WDB = \angle WAB = \angle CAW = \angle WBE$), тому $WE \cdot WD = WB^2$. Але за теоремою про «тризуб» $WI = WB$, отже $WE \cdot WD = WI^2$. Звідси випливає, що трикутники WID та WEI подібні. Тому $\angle WEI = \angle WID = 2\angle IAD$. Але

$$\angle WEC = \frac{1}{2}(\smile CW + \smile BD) = \frac{1}{2}(\smile WB + \smile BD) = \frac{1}{2} \smile WD = \angle IAD.$$

Отже, $\angle WEI = 2\angle WEC$. Це означає, що пряма BC є бісектрисою кута WEI, а тому точка K лежить на прямій WD, що завершує доведення.

8. *(Олександр Толесніков)* Є вісім зовні однакових монет, серед яких чотири справжні монети вагою 10 г та чотири фальшиві монети вагою 9 г. Іржаві терези показують, яка шалька переважила, якщо загальна вага монет на лівій і правій шальці відрізняється хоча б на 2 г. Доведіть, що можна знайти всі фальшиві монети за 6 зважувань на іржавих терезах.

Розв'язання. Занумеруємо монети числами від 1 до 8 та позначимо їхні маси $m_1, m_2, \dots, m_8$. Помітимо, що зважування на іржавих терезах може дати не такий результат, як на звичайних, лише у ситуації, коли на терезах знаходиться непарна кількість фальшивих монет. Будемо планувати зважування так, аби цього уникати.

Першим зважуванням порівняємо $m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ та $m_5 + m_6 + m_7 + m_8$, а другим $m_1 + m_2 + m_5 + m_6$ та $m_3 + m_4 + m_7 + m_8$.

Випадок 1. Нехай терези обидва рази показали рівновагу, тобто

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = m_5 + m_6 + m_7 + m_8,$$
$$m_1 + m_2 + m_5 + m_6 = m_3 + m_4 + m_7 + m_8.$$

Тоді $m_1 + m_2 = m_7 + m_8$ та $m_3 + m_4 = m_5 + m_6$. Це означає, що або у кожній з пар $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$ та $(7,8)$ одна з монет справжня та одна фальшива, або монети $1, 2, 7, 8$ однакові та монети $3, 4, 5, 6$ однакові. Третім зважуванням порівняємо $m_1 + m_7$ та $m_2 + m_8$, а четвертим $m_1 + m_8$ та $m_2 + m_7$. Якщо обидва рази була рівновага, то монети $1, 2, 7, 8$ однакові та монети $3, 4, 5, 6$ однакові. П'ятим зважуванням порівнюємо $m_1 + m_2 + m_7 + m_8$ та $m_3 + m_4 + m_5 + m_6$ і знаходимо, в якій четвірці всі монети справжні, а в якій всі фальшиві. Якщо ж одне із зважувань результативне, ми знайшли дві справжні монети серед $1, 2, 7, 8$, а п'ятим і шостим зважуваннями можемо аналогічно знайти дві справжні монети серед $3, 4, 5, 6$.

Випадок 2. Нехай хоча б в одному з перших двох зважувань рівноваги не було. Третім зважуванням порівняємо $m_1 + m_2 + m_7 + m_8$ та $m_3 + m_4 + m_5 + m_6$.

Помітимо, що пари монет $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$ та $(7,8)$ можуть важити (у деякому порядку) або 20 г, 20 г, 18 г, 18 г, або 20 г, 19 г, 19 г, 18 г, або 19 г, 19 г, 19 г, 19 г. Останній із цих варіантів неможливий, бо в одному з двох перших зважувань не було рівноваги. Якщо пари важать 20 г, 20 г, 18 г, 18 г, то у перших трьох зважуваннях двічі була рівновага, а один раз переважила шалька, на якій було дві пари монет вагою 20 г. Якщо ж пари важать 20 г, 19 г, 19 г, 18 г, то у перших трьох зважуваннях рівновага була лише один раз, пара монет вагою 20 г двічі була на важкій шальці, а пара монет вагою 18 г – двічі на легкій. Отже, за результатами трьох зважувань будуть знайдені або всі справжні та всі фальшиві монети, або дві справжні і дві фальшиві монети та дві пари монет, в яких одна монета справжня та одна фальшива. Нехай це пари монет $(2i-1, 2i)$ та $(2j-1, 2j)$. Четвертим зважуванням порівнюємо $m_{2i-1} + m_{2j}$ та $m_{2i} + m_{2j-1}$, а п'ятим $m_{2i-1} + m_{2j-1}$ та $m_{2i} + m_{2j}$. Деяке із цих зважувань буде результативним і дозволить знайти останні дві справжні монети.

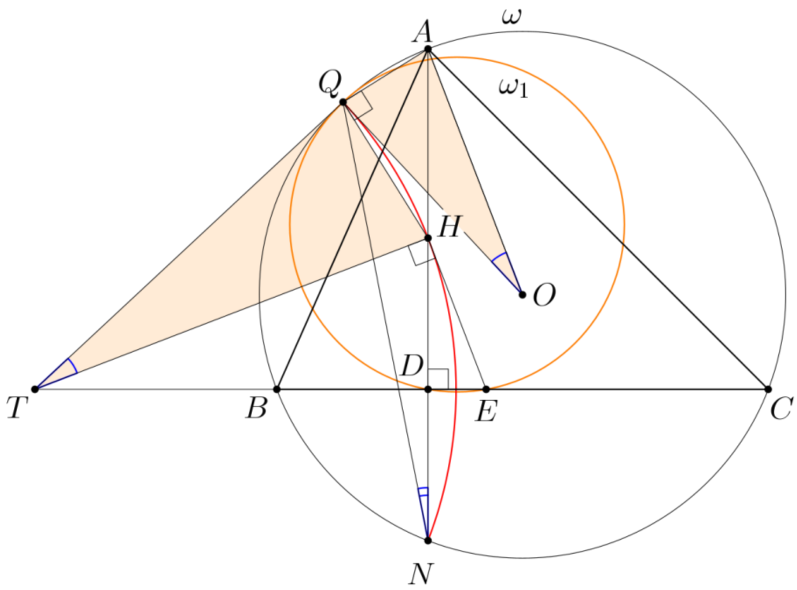
9. *(Михайло Сидоренко, учень 10 класу)* Нехай AD – висота гострокутного трикутника ABC, H – ортоцентр, O – центр кола ω, описаного навколо трикутника ABC. На стороні BC відмітили точку E так, що $HE \parallel AO$, а на колі ω точку Q так, що $\angle AQH = 90°$. Доведіть, що коло ω_1, описане навколо трикутника QED, дотикається до кола ω.

Розв'язання. Нехай N – точка, симетрична до H відносно BC, а T – центр кола, описаного навколо трикутника QHN. Точка T лежить на серединному перпендикулярі до HN, тобто на прямій BC. Доведемо, що пряма TQ є спільною дотичною до кіл ω та ω_1.

Оскільки $\angle BNC = \angle BHC = 180° - \angle BAC$, то точка N лежить на колі ω. Тому

$$\angle QTH = 2\angle QNH = 2\angle QNA = \angle QOA.$$

Але $AO = OQ$, $QT = TH$ як радіуси. Тому рівнобедрені трикутники QOA та QTH подібні. Перший із цих трикутників переходить у другий при композиції гомотетії та повороту навколо точки Q на кут $\angle AQH = 90°$. Тому $TQ \perp OQ$, тобто пряма TQ є дотичною до кола ω, а також $TH \perp AO$. Оскільки $HE \parallel AO$, то $TH \perp HE$. Таким чином, трикутник THE прямокутний та HD – висота цього трикутника, проведена до гіпотенузи. Тому $TD \cdot TE = TH^2 = TQ^2$, а отже пряма TQ є дотичною до кола ω_1.



10. Нехай $0 \le a, b, c, d \le 1$. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+d} + \frac{1}{1+d+a} \le \frac{4}{1+2\sqrt[4]{abcd}}.$$

Розв'язання. При будь-яких $0 \le x, y \le 1$ та $t \ge 1$ маємо

$$\frac{1}{x^2+t} + \frac{1}{y^2+t} - \frac{2}{xy+t} = \frac{(x-y)^2(xy-t)}{(x^2+t)(y^2+t)(xy+t)} \le 0.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c}\right) + \left(\frac{1}{1+c+d} + \frac{1}{1+d+a}\right) \le \frac{2}{1+b+\sqrt{ac}} + \frac{2}{1+d+\sqrt{ac}} \le$$

$$\le \frac{4}{1+\sqrt{ac}+\sqrt{bd}} \le \frac{4}{1+2\sqrt[4]{abcd}}.$$